第 13 卷 第 1 期 · 数 学 进 展 Vol. 13, No. 1
1984 年 1 月 ADVANCES IN MATHEMATICS Jan., 1984

选择公理与连续统假设*

戚 征
(中国科学院数学研究所)

§1. 引 言

选择公理 (AC) 令 s 为由互不相交之非空集 x 所成之集,则必存在集 $c\subseteq U_{x\in s}x$, c 与每个 x 有且仅有一个共同元.

称上述之 c 为 s 之"选择集". 当 s 仅由一个非空集 x 构成时, 由 x 为非空之定义立见 AC 成立;从而当 s 为有限集时 AC 亦成立. 但当 s 为无限集时, 既无法在有限时间内从每个 x 中任选一元来构成 c, 又没有一种规则能对每个 x 都唯一地确定出一个元(尽管不能逐一选遍全体 $x\in s$) 来构成 c, 此时 c 之存在性是有争议的. 诸如 H. Poincaré, L. E. J. Brouwer 及 H. Weyl 这些数学家都曾怀疑过 AC. 值得注意的是, 当 s 为无限集时,每个集 x 皆为有限的条件对保证选择集 c 之存在既不必要亦不充分;例如当每个 x 皆为良序集时,可于每个 x 中取其最小元(这是一种确定的规则)来构成 c;而当每个 x 皆为有限集时, c 之存在与否需视具体情况而定. 按 B. Russell 的有趣的例子来解释这一点: 当无限集 s 之每个元 x 皆为一双鞋所成之二元集时, 可于每个 x 中取出左脚穿的鞋来构成 c; 但当每个 x 皆为一双袜所成之二元集时, 就没有一种规则保证 c 之存在,因袜子不分左右!

G. Cantor 早就在无意中用 AC 证明问题了. G. Peano 在 1890 年发表的一篇解常微分方程组的文章([52]210)中明显地暗示了 AC, 但对其持拒绝的态度,他设法在该具体情况下证出选择集 c 之存在. 在 J. van Heijenoort [27] 139 和 A. A. Fraenkel et al. [19]57 中都提到 B. Levi 在 1902 年的文[41]中首次提到并使用了 AC. 但 B. Moss 在文[50]中指出这是对 Levi 文章之内容和着重点的误解,因为就文意看来 Levi 并不相信 AC. E. Zermelo 于 1904 年的文 [86] 中明确提出了 AC, 并用它给出了良序定理的第一个证明,它又于 1908 年的文[87]中用 AC 给出第二个证明. 文中声明他是根据 E. Schmidt 的提示提出 AC 的,其形式与现今所谓的"一般选择原理"接近. 即不假设 s 之元互不相交,而断言存在定义于 s 上之"选择函数" f 使 $f(x)\in x(x\in s)$. B. Russell 于 1906 年在文[62] 47—52 中对互不相交之元 x 给出 AC 的 Descartes 乘积形式(他所谓的"乘法公理")以及本节一开头给出的那种 (关于 s 的选择集 c 的) 形式. E. Zermelo 于 1908 年的文 [87]110 和 [88]266, 273ff 中用集论的其它公理论证了这几种不同形式的 AC 之等价性,而容易引起误解的"选择"一词就是在文 [88]266 中最先提出的.

* 1981 年 1 月 26 日收到. 1981 年 10 月 28 日收到修改稿.

© 1994-2011 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

除 Euclid 的平行公设外，数学中未见有其它公理能象 AC 这样引起数学界这么大的兴趣和有关其数学基础的如此众多的研讨．问题在于其非构造特性．直到十九世纪，数学中的“存在”一词还是“可构成”的同义词． G. Cantor 关于超限数存在的证明曾遭到当时一些著名数学家的反对与怀疑． 当时有位 H. Hermes 教授曾花费了十年时间去作一个正 65,537 边形，其实比他早一个世纪就已由 C. F. Gauss 证明其存在了！但因该证明是非构造性的，Hermes 就不相信它．

是否一定要用 AC 呢？在有限数学中实际上可以不用，因当 s 为有限集时，选择集 c 之存在并无疑问．但在研究抽象无限结构的近代数学如点集拓朴、代数、测度论及泛函分析等领域中，AC 是必不可少的．更不用说 AC 在集论本身中的重要地位了．

有两个较 AC 弱的选择原理常被用到，它们是：

AC_ω（**可数选择公理**）由可数个非空集所成之集 s 有选择函数．

DC（**相关选择原理**）若 ρ 为非空集 s 上之二元关系，且 $\forall x\in s\exists y\in s$, $x\rho y$；则 $\forall x_0\in s$ $\exists\langle x_n|n\in\omega\rangle\subset s$, $x_0\rho x_1$, $x_1\rho x_2$, $\cdots$, $x_n\rho x_{n+1}$, $\cdots$.

已证 $AC\rightarrow DC\rightarrow AC_\omega$（P. Bernays 1942, [4] III），$DC\not\rightarrow AC$（S. Feferman 1964[16]），$AC_\omega\not\rightarrow DC$（R. B. Jensen 1966[35]）．

关于 AC 及其历史进展的概要可参看谢邦杰 1979[85] 一书．

§2. 与 AC 等价的某些命题

（1）若 s 为非空集 x 所成之集，则必存在定义于 s 上之选择函数 f, $\forall x\in s$, $f(x)\in x$（E. Zermelo 1904[86]）．

（2）若 s 为互不相交之非空集 x 所成之集，则必存在 $c\subseteq\bigcup_{x\in s}x$，$c$ 与每个 x 有且仅有一个共同元（B. Russell 1906[62]）．

（3）若 s 为非空集 x 所成之集，则 Descartes 乘积 $\times_{x\in s}x\neq 0$[62]．

（4）每个集皆可良序化（E. Zermelo 1904[86]）．

命题(4)是 G. Cantor 在 1883 年提出的猜想．D. Hilbert 在 1900 年于 Paris 举行的第二届国际数学家大会（ICM）上说明他提出的 23 个著名问题中的第一个——“连续统之势的 Cantor 问题”即所谓的连续统假设（CH）时，曾说到良序定理可能包含着证明 CH 的“钥匙”，他认为这二者是密切联系的．在 1904 年于 Heidelburg 举行第三届 ICM 时，J. König 于 8 月 10 日提出了他的实数连续统不可良序化的“证明”，但很快就不得不放弃这个“证明”．此后不到两个月，E. Zermelo 就用 AC 证出了良序定理，他于同年发表的那篇短文[86]是他写给 Hilbert 的信的一部分．

（5）良序集之幂集必可良序化（H. Rubin 1960[59]）．

（6）若 s 为以集为元之集，则 s 作为对包含关系 $\subset$ 之部分有序集有极大链（链即线性有序子集，$x\subset y$ 表 x 为 y 之真子集）（F. Hausdorff 1914[26]）．

（7）任一部分有序集皆有极大链[26]．

（8）令 s 为以集为元之非空集，若对包含关系 $\subset$ 而言 s 的每个非空链中之集之并仍为 s 之元，则 s 有极大元（K. Kuratowski 1922[39]; M. Zorn 1935[89]）．

© 1994-2011 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

(9) 令 s 为以集为元之非空集，若对包含关系 $\subset$ 而言 s 的每个良序链中之集之并仍为 s 之元，则 s 有极大元[39].

(10) 若非空部分有序集 s 中之每个链皆有上界，则 s 有极大元 (N. Bourbaki 1939[5]; J. W. Tukey 1940[81]).

(11) 若非空部分有序集 s 中之每个良序链皆有上界，则 s 有极大元 (T. Szele 1950[78]).

注记 Bourbaki-Tukey 形式的极大原理(10)即为文献中经常提到的"Zorn 引理"，其实 Zorn 在 1935 年提出的是形式(8)的极大原理，这早在 1922 年就已由 Kuratowski 提出并详加研讨了. 而形式上差别稍大一点的极大原理 (6)，(7) 则更早在 1914 年就已由 Hausdorff 提出了. 但 Zorn 在文[89]中第一个证明了(8)与 AC 等价.

(12) 三分律: 任二基数 m, n 必满足且仅满足 $m<n$, $m=n$ 及 $m>n$ 三关系之一 (F. Hartogs 1915[24]).

(13) 对任何无穷基数 m 恒有 $m^2=m$ (A. Tarski 1924[79]).

(14) 任意多个紧拓朴空间之 Тихонов 乘积亦为紧拓朴空间(A. H. Тихонов 1935[82]; J. L. Kelley 1950[38]).

因 AC $\rightarrow$ (14) 为熟知，现仅简述一下 (14) $\rightarrow$ (AC) 之过程. 令 $s=\{x_i|i\in I\}$ 为以非空集 x_i 为元之集，任取定一元 a，并令 $y_i=x_i\cup\{a\}$. 以 y_i 之有限子集及 y_i, x_i 为 y_i 中之闭集，则 y_i 成为紧拓朴空间. 考虑 $\times_{i\in I}y_i$ 中之闭集 $z_j=x_j\times(\times_{j\neq i\in I}y_i)$，则集 $\{z_i|i\in I\}$ 中任意有限个元之交非空(在有限个 x_j 中各任取一点，而在其余下标 i 所对应之投影 y_i 中一律取 a)。故由 $\times_{i\in I}y_i$ 之紧性立见 $\times_{i\in I}x_i=\times_{i\in I}z_i\neq 0$.

(15) 同一紧拓朴空间 x 之任意多次重复的 Тихонов 乘积 $\times_{i\in I}x$ (其中 I 为任意指标集)亦为紧拓朴空间 (L. E. Ward Jr 1962[83]).

已知 AC $\rightarrow$ (15)，故仅须证明 (15) $\rightarrow$ AC. 令 $s=\{x_i|i\in I\}$ 为由互不相交之非空集 x_i 所成之集，$x=\cup_{i\in I}x_i$. 于 x 中取 x 及所有可能的有限个 x_i 之并集为闭集，则 x 成为紧拓朴空间. 由 (15) 知 $\times_{i\in I}x$ 亦为紧拓朴空间. 考虑其中之闭集 $z_j=x_j\times(\times_{j\neq i\in I}x)$. 任意有限个此种闭集之交必非空(因可于有限个 x_j 中各任取一元，而在其余下标 i 所对应之投影 x 中任意取定**同一个**元 a). 故由乘积空间之紧性立见 $\times_{i\in I}x_i=\times_{i\in I}z_i\neq 0$.

(16) 任意赋范线性空间 X 之对偶 X^* 中之单位球有极端点 (J. L. Bell & D. H. Fremlin 1972[3]).

(17) BPIT + KM([3]).

(18) HB + VKM ([3]).

以上之 BPIT 表 Boole 代数之素理想定理. KM 表 Крейн-Мильман 定理: 局部凸线性拓朴空间 X 中之非空、紧、凸集 K 必有极端点. 而 VKM 为 KM 之加强，即将其中之"紧"改为"凸紧"而得者. X 之子集 K 称为**凸紧**的，若 $\{c_\tau\}$ 为 X 中之闭凸集所成之非空集，且 $\{K\cap c_\tau\}$ 中任意有限个元之交非空时，必有 $\cap_\tau(K\cap c_\tau)\neq 0$. HB 表 Hahn-Banach 定理: 令 X 为实线性空间，$p(x)$ 为 X 上之实泛函，当 $x,y\in X$，$r\geqslant 0$ 时恒有 $p(x+y)\leqslant p(x)+p(y)$，$p(rx)=rp(x)$；若 f_0 为定义于 X 之子空间 X_0 上之实线性泛函，

© 1994-2011 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$f_0(x) \leqslant p(x)$ $(x \in X_0)$; 则必存在定义于整个 X 上之实线性泛函 f, $f(x) = f_0(x)(x \in X_0)$, $f(x) \leqslant p(x)(x \in X)$.

H. Rubin & J. E. Rubin 1963[60]是有关 AC 之等价命题的最为详尽的专著. 附带提一下,弱于 AC 而强于 AC_ω 之 DC 是等价于 Baire 纲定理的 (C. E. Blair, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. **25**(1977), 933—935).

§3. 证明中用到 AC 的一些熟知命题

(1) 可数个可数集之并集为可数.

熟知的证法是将这些可数集之元排成序列,再将各序列排成如下之无穷阵:

$$\begin{array}{ll} a_0: & a_{00}a_{01}\cdots a_{0n}\cdots \\ a_1: & a_{10}a_{11}\cdots a_{1n}\cdots \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_m: & a_{m0}a_{m1}\cdots a_{mn}\cdots \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

然后按箭头所示方向依次从左上角往右下角将阵中之元排成一列 $a_{00}, a_{01}, a_{10}, a_{02}, a_{11}, a_{20}, \cdots$. 但事实上当可数集 A 之元 a 皆为可数集时, A 之元与自然数集之 (1-1) 对应之全体之集 xA 有势 $\mathfrak{c}$, 而 A 之每个元 a 与自然数集之 (1-1) 对应之全体之集 x_a 亦有势 $\mathfrak{c}$. 以上的阵是从 $s = xA \cup \{x_a | a \in A\}$之各元中各选了一个元的结果,这里用了 AC_ω.

(2) 每个无限集必包含一个可数子集 (A. N. Whitehead, B. Russell 1912[84]).

在一般教本(例如 И. П. Натансон[51] ГЛ. I, §3, Теорема 2)用的是逐步从无限集 a 中取一个元的办法抽出子列来,这是不严格的,因这种选取毫无规律, 又不可能经有限步作完. 严格的证明如下: $\forall n = 1, 2, \cdots$, 令 $x_n = \{\varphi | \varphi$ 为集 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 在 a 中之(1-1)映射$\}$. 对 $s = \{x_n | 1 \leqslant n < \omega\}$ 用 AC_ω 知有选择函数 f, 使 $\varphi_n = f(x_n) \in x_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 令 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 经 φ_n 映射后所得之象为 n 个不同的元 $a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \cdots, a_n^{(n)}$, 于序列 $a_1^{(1)}, a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, \cdots, a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \cdots, a_n^{(n)}, \cdots$ 中从左至右逐一去掉前面已出现过的元,如此所得之序列即合所求. 因第 n 组出现 n 个不同之元,故以上元列中不可能只有有限个不同之元. 因元列之存在是由 AC_ω 保证的,从而逐步淘汰掉重复的元是完全有规律的,并没有作无穷多次任意选择.

(3) 第一个不可数序数 ω_1 非为序数之可数增加列之极限(用 AC_ω).

(4) 任一线性空间必有**基**(即极大线性无关子集).

(5) 任一线性空间之任二基必有同一基数.

(6) 任一域必有唯一之**代数闭包**(即代数封闭的代数扩域).

(7) 任一 Boole 代数必有素理想[超滤子] (M. H. Stone 1936[77]).

(8) Stone 表示定理: 每一 Boole 代数 B 皆同构于一集合代数[可取此集合代数为一完全不连通紧 Hausdorff 空间 (所谓 B 之 "Stone 空间")中全体既开又闭之集所成之代数] (M. H. Stone 1934[76]; 1936[77]).

(9) Hahn-Banach 延拓定理(J. toś &. C. Ryll-Nardzewski 1951[46]; W. A. J. Luxem-

© 1994-2011 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

burg 1967[45]).

(10) 在每个 Boole 代数 B 上恒可定义如下之实测度 μ:μ 为 B 上之实值函数，$\mu(b) \geqslant 0(b \in B)$，$\mu(0)=0$，$\mu(1)=1$，$\mu(a+b)=\mu(a)+\mu(b)\,(a, b \in B, a \cdot b=0)$ (C. Ryll-Nardzewski (未发表); [45]),((9)与(10)等价.)

(11) Крейн-Мильман 定理.

(12) 可分距离空间之子空间必可分(用 AC_ω).

(13) Урысон 引理: 若 A, B 为正规拓扑空间 X 中之不相交闭集，则必存在定义于 X 上之连续实函数 f, $0 \leqslant f(x) \leqslant 1(x \in X)$, $f(A)=\{0\}$, $f(B)=\{1\}$.

(14) 令 $\mathbf{B}$ 为直线 $\mathbf{R}$ 上之全体开集所生成之最小 σ-代数，即 $\mathbf{B}$ 为 $\mathbf{R}$ 中 Borel 集之代数，则 (i) $\mathbf{B}=\bigcup_{\xi<\omega_1}\mathbf{B}_\xi$，其中 $\mathbf{B}_0$ 为全体开集之集，$\forall \xi>0$，B_ξ 为 $\bigcup_{\eta<\xi}\mathbf{B}_\eta$ 之元及其余集之可数并之全体之集. (ii) $\mathbf{B}_\xi \subsetneqq \mathbf{B}_{\xi+1}(\xi<\omega_1)$ (用 AC_ω).

(15) Lebesgue 测度为可数可加(用 AC_ω).

(16) 存在 Lebesgue 不可测集.

(17) 存在不满足 Baire 性质之集.

(18) 在实轴 $\mathbf{R}$ 上存在无处连续之实值可加函数.

(19) 令 $\mathbf{R}$ 表实直线，$A \subset \mathbf{R}$，则点 x 之任何邻域皆与 A 有交点之充要条件为存在 $\{x_n\} \subseteq A$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ (证明此条件之必要性时要用 AC_ω).

(20) 令 $\mathbf{R}$ 表实直线，$A \subset \mathbf{R}$，则 A 为有界闭集之充要条件为 A 中任一列元 $\{x_n\}$ 必有子列 $\{x_{n_k}\}$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \in A$ (证明此条件之充分性时要用 AC_ω).

(21) 令 $f(x)$ 为定义于 $[a, b]$ 上之实函数，$x_0 \in [a, b]$. 则 $\forall \varepsilon>0\, \exists \delta>0$ 使当 $x \in [a, b]$, $|x-x_0|<\delta$ 时 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ 之充要条件为对 $[a, b]$ 中收敛于 x_0 之任意序列 $\{x_n\}$ 恒有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(x_0)$ (证明此条件之充分性时要用 AC_ω).

命题(21)是数学分析中熟知的函数 $f(x)$ 在一点 x_0 处之连续性的 E. L. Cauchy 的 ε-δ 邻域定义 (CC) 与 E. Heine 的序列极限定义 (HC) 的等价性. 显然证明 (CC)→(HC) 时无需用 AC. 但在证明 (HC)→(CC) 时要用 AC_ω. 下面的定理说明，不用某种形式的选择原理是不行的. 考虑条件:

(S) 对互不相交之非空实数集之列 $\langle X_n | 1 \leqslant n < \omega\rangle$ 必有子列 $\langle X_{n_k} | 1 \leqslant k < \omega\rangle$ 及实数列 $\langle x_k | 1 \leqslant k < \omega\rangle$, $x_k \in X_{n_k}(k=1, 2, \cdots)$.

定理 3.1 (W. Sierpiński 1918[66]). ((HC)→(CC))⟷(S).

证　不妨设 $f(x)$ 定义于 $[0, 1]$ 上. 若在 $x_0=0$ 对 $f(x)$ 而言 (HC)→(CC). 对任给的互不相交之非空实数集之列 $\langle X_n | 1 \leqslant n<\omega\rangle$ 定义 $f(x)$ 如下: 对 $n=1, 2, \cdots$ 令 $f(0)=f\left(\frac{1}{n}\right)=0$. 当 $x \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$ 时，$-1<2n(n+1)x-2n-1<1$，故

$\varphi_n(x)=\dfrac{2n(n+1)x-2n-1}{1-|2n(n+1)x-2n-1|}$ 确定有限，此时定义

$$f(x)=\begin{cases}1, & \varphi_n(x) \in X_n, \\ 0, & \varphi_n(x) \notin X_n.\end{cases}$$

©1994-2011 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$\forall\delta>0$ 任取正整数 $n>\frac{1}{\delta}$. $\forall\xi\in X_n$ 令 $x_\xi=\frac{1}{2n(n+1)}\left(\frac{\xi}{1+|\xi|}+2n+1\right)$,则显然有 $x_\xi\in\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right)\subset(0,\delta)$. 代入得 $\varphi_n(x_\xi)=\xi\in X_n$，从而按定义知 $f(x_\xi)=1$. 合 $f(0)=0$ 知 $\forall\delta>0\exists x_\xi\in(0,\delta)$ 使 $|f(x_\xi)-f(0)|=1$. 故在 $x_0=0$ 处非为 (CC). 从而由题设 (HC)→(CC) 知在 $x_0=0$ 处亦非为 (HC). 因 $f(x)$ 仅取 0 及 1 二值，故 $\exists\{u_j\}\subset(0,1)$, $\lim\limits_{j\to\infty}u_j=0$, $f(u_j)=1(j=1,2,\cdots)$. $\forall p=1,2,\cdots$ 在 $\{u_j\}$ 中仅有有限个项 $u_j\in\left(\frac{1}{p+1},\frac{1}{p}\right)$. 按 $f(x)$ 之定义知此有限个 $u_j\neq0$ 或 $\frac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$. 故必有正整数列 $p_1<p_2<\cdots$, 在每个 $\left(\frac{1}{p_k+1},\frac{1}{p_k}\right)$ 中各包含有限个 u_j；令此有限个 u_j 中之下标最小者为 v_k，则 $\forall k=1,2,\cdots$, $v_k\in\left(\frac{1}{p_k+1},\frac{1}{p_k}\right)$. 令 $x_k=\varphi_{p_k}(v_k)$,则因 $f(v_k)=f(u_j)=1$. 故按 $f(x)$ 之定义知 $\forall k=1,2,\cdots$, $x_k=\varphi_{p_k}(v_k)\in X_{p_k}$；即 (S) 成立.

反之,若 (S) 成立，而 $f(x)$ 在$[0,1]$中点 x_0 处非为 (CC)，则必 $\exists\varepsilon>0$ 使由 $|x-x_0|<\frac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$ 不能保证 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. 此时令

$$P_n=\left\{x\,|\,x\in[0,1],\frac{1}{n+1}\leqslant|x-x_0|<\frac{1}{n},\ |f(x)-f(x_0)|\geqslant\varepsilon\right\},$$

则显然诸 P_n 互不相交,且必有无穷多个 $P_n\neq0$. 以$\langle X_n|1\leqslant n<\omega\rangle$ 表此诸非空之 P_n 所成之子列.由 (S) 知有子列 $\langle X_{n_k}|1\leqslant k<\omega\rangle$ 及实数列$\langle x_k|x_k\in X_{n_k},1\leqslant k<\omega\rangle$,故必 $|f(x_k)-f(x_0)|\geqslant\varepsilon(k=1,2,\cdots)$. $\forall p=1,2,\cdots$ 显然 $\langle x_k|1\leqslant k<\omega\rangle$ 中至多有 p 个元在 $P_1\cup\cdots\cup P_p$ 中，即 $\exists q\geqslant1$ 使当 $k>q$ 时 $x_k\in P_{p+1}\cup P_{p+2}\cup\cdots$. 从而 $|x_k-x_0|<\frac{1}{p+1}(k>q)$，此即 $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=x_0$. 由 $|f(x_k)-f(x_0)|\geqslant\varepsilon(k=1,2,\cdots)$知在 x_0 处 $f(x)$ 非为 (HC). 故已证 (HC)→(CC).

定理 3.2[66] 不用附加任何形式的选择原理,可证当 $f(x)$ 在 $[a,b]$上到处为(HC)时,亦必在 $[a,b]$ 上到处为 (CC).

证　令 $\langle u_k|1\leqslant k<\omega\rangle$ 表$[a,b]$中全体有理数之列. $\forall x_0\in[a,b]$, $\forall\varepsilon>0$, 若不 $\exists\delta>0$ 使当有理数 $r\in[a,b]$, $|r-x_0|<\delta$ 时恒有 $|f(r)-f(x_0)|<\varepsilon$；则 $\forall n=1,2,\cdots\exists u_k\in[a,b]$, $|u_k-x_0|<\frac{1}{n}$,$|f(u_k)-f(x_0)|\geqslant\varepsilon$. 令$\langle u_k|1\leqslant k<\omega\rangle$中满足此条件之第一个 $u_k=r_n$.则 $\forall n=1,2,\cdots\exists$ 有理数 $r_n\in[a,b]$, $|r_n-x_0|<\frac{1}{n}$, $|f(r_n)-f(x_0)|\geqslant\varepsilon$. 从而由 $\lim\limits_{n\to\infty}r_n=x_0$ 及 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上到处为 (HC) 之题设知 $\lim\limits_{n\to\infty}f(r_n)=f(x_0)$. 此与 $|f(r_n)-f(x_0)|\geqslant\varepsilon$ 矛盾!故 $\forall\varepsilon>0\exists\delta>0$ 使当有理数 $r\in[a,b]$, $|r-x_0|<\delta$时恒有 $|f(r)-f(x_0)|<\varepsilon$. $\forall x\in[a,b]$, $|x-x_0|<\delta$, $\exists$ 有理数列$\langle x_n|1\leqslant n<\omega\rangle\subset[a,b]$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$. 因 $f(x)$ 在$[a,b]$上到处为(HC)，故 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(x)$. 显然 $\exists N>0$ 使当 $n\geqslant N$ 时 $|x_n-x_0|<\delta$. 因 x_n 为有理数，故当 $n\geqslant N$ 时 $|f(x_n)$

© 1994-2011 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$-f(x_0)| < \varepsilon$. 令 $n \to \infty$ 即得 $|f(x)-f(x_0)| \leqslant \varepsilon$, 即在 $[a, b]$ 中任一点 x_0 处 $f(x)$ 皆为 (CC).

有关本节题材的进一步的材料见 T. J. Jech 1973[32].

§4. 用 AC 可证出许多奇怪的命题

(1) 在 Euclid 平面 $\mathbf{R}^2$ 上存在点集 Q, $\mathbf{R}^2$ 中之每条直线与Q有且仅有两个交点 (S. Mazurkiewicz 1914[48], 382—383, Cp. W. Sierpiński 1958[70], 446—449).

(2) 令 $\mathbf{R}^2$ 中之每条直线 S 对应上一基数 m_S, $2 \leqslant m_S \leqslant 2^{\aleph_0}$. 则 $\exists Q \subset \mathbf{R}^2$, $\forall$ 直线 $S \subset \mathbf{R}^2$, $|Q \cap S| = m_S$. (F. Bagemihl 1952[1]; W. Sierpiński 1953[69]).

(3) 在 Euclid 空间 $\mathbf{R}^3$ 中之单位球面K可分解为四个互不相交之集 Q, R, S, T; 其中Q为可数, $R \cong S \cong T \cong S \cup T$, 其中"$\cong$"为全等号,表示其两端之集经绕球心之旋转后可合而为一 (F. Hausdorff 1914[26] 469—472; Cp. И. П. Натансон 1950[51] XI, §5).

(4) $\mathbf{R}^3$ 中之单位球面[开单位球,闭单位球]K可分解为 4[5] 个互不相交之集 $S_i(i = 1, 2, 3, 4)$ $[S_i(i = 1, 2, 3, 4, 5)$, 其中 S_5 为由球心所成之单点集]. 将 S_i 绕球心作适当之旋转 R_i[R_5 为恒等变换]可得 $K = R_1(S_1) \cup R_2(S_2) = R_3(S_3) \cup R_4(S_4)$ $[K = R_1(S_1) \cup R_2(S_2) \cup S_5 = R_3(S_3) \cup R_4(S_4) \cup S_5]$, 其中等号同侧之各 $R_i(S_i)$ 当 i 不同时互不相交, 而 4[5] 为使上述分解成立之最小数 (S. Banach et A. Tarski 1924[2]).

(5) 令 K_r, K_ρ 为 $\mathbf{R}^3$ 中以 r 及 ρ 二正数为半径之二球面[开球,闭球],则可将 K_r 分解为有限个互不相交之集 $S_i(i = 1, 2, \cdots, n)$, 且存在 n 个刚性运动 (平移及旋转) $M_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 使 $K_\rho = \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant n} M_i(S_i)$, 其中诸 $M_i(S_i)$ 两两不相交 (Hausdorff-Banach-Tarski-von Neumann-Robinson; Cp. R. M. Robinson 1947[57]).

注记 (i) 此诸分解所得之集 R, S, T, S_i(S_5 除外)等皆非 Lebesgue 可测, 其造法与在 $\mathbf{R}^1$ 中造 L-不可测集之法相近. 若它们皆为 L-可测, 则由 L-测度之运动不变性及可加性将得出小数等于大数之矛盾.

(ii) 这些怪结果使人们更加怀疑 AC 了. 当 Zermelo 于 1904 年在 Math. Annalen 第 59 卷上首次用 AC 证明问题后,同刊 1905 年第 60 卷 194—195 页所载 E. Borel 的专文就是反对这种证明的. J. Hadamard 在 1905 年的 Bull. de la Soc. Math. de France, 33 卷 261—273 页的信中也提出了反对意见. 但后来 E. Borel 与 A. Denjoy 都倾向于承认可数选择公理 AC_ω, 而 H. Lebesgue 已看出区别集合 s (由非空集 x 所成之集)之不同的超限基数顶多是个心理上的理由罢了. 尽管在 1904 年以后一段时间内数学杂志上充满了反对 AC 的意见,有趣的是也是在 Math. Annalen 1905 年 60 卷 495—462 页上发表了 G. Hamel 用前一卷中 Zermelo 刚用 AC 证出的良序定理证明了实数集 $\mathbf{R}$ 中 Hamel 基之存在,并用此种基证明了在 $\mathbf{R}$ 中存在不连续的可加函数(§3,(18)).

(iii) 下一定理说明,单从 AC 能推出一些奇怪的结论就企图否定 AC 的理由是不充分的,因为不用 AC 而用很初等的方法也能证出类似的怪命题.

定理 4.1 (S. Mazurkiewicz et W. Sierpiński 1914[49]). 在 $\mathbf{R}^2$ 中存在点集 $M = A \cup B$, $A \cap B = 0$, $A \cong B \cong M$.

© 1994-2011 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

证　在复平面中考虑两个刚性运动 $R(z)=e^iz$ 及 $T(z)=z+1$（z 为复变数）. 令 M 为由 $z=0$ 经有限次 R 及 T 之作用而得之点之全体之集，则显然 M 中每一点皆可表为 e^i 之一多项式，其系数为非负整数. 因 e^i 为超越数(见例如 C. L. Siegel & R. Bellman 1947[65] Chap. 1)，故此种表示为唯一，故可令 M 中之点与 e^i 之非负整系数多项式(1-1)对应. 令 A 为 M 中之点在此种表示下无常数项者全体之集，并令 $B=M\sim A$. 则显然可见 $A\cup B=M$, $A\cap B=0$, $R(M)=A$, $T(M)=B$, 从而 $A=R(M)\cong M\cong T(M)=B$.

§5. 连续统假设 (CH) 与广义连续统假设 (GCH)

这里，"连续统"一词是指全体实数之集，现今拓扑中的连续统是指非空的连通、紧集. 已知，距离空间中的连续统若多于一个点，则其基数必为 $\mathfrak{c}$. G. Cantor 于 1878 年([7]256, [8]132) 提出了"连续统假设"："在可数集之基数 $\mathfrak{a}$ 与实数连续统之基数 $\mathfrak{c}$ 之间不存在其它基数". 这是集论中早期出现的名题之一，当时的许多数学名家都曾试图解决它. 在上世纪末 Cantor 曾认为他能证出此猜想，并数次在自己的文章中许愿要在以后发表文章来证明它，最后他甚至曾宣称已经证出了它；当然，他实际上并没有证出来 (cp. [8], 244). 据说，Cantor 在 1884 年健康恶化到危险程度的部分原因就在于他不顾一切地力图证明 CH. D. Hilbert 于 1900 年 8 月 8 日在 Paris 举行的第二届 ICM 上提出的二十三个著名问题中的第一号——"连续统之势的 Cantor 问题"就是 CH. 在 1904 年于 Heidelburg 举行的第三届 ICM 上有人想证明也有人想否定 CH，但都是错的. Hilbert 在 1925 年的文[28]中曾有意用他的元数学理论证明 CH 之相容性而未果. 总之，从 CH 提出直到 1938 年以前这六十年间，在这一问题的解决上一直没有重大进展；但常用 CH 来简化一些问题的证明.

下列四个命题皆与 CH 等价：

(1) $\mathbf{R}^3=S_1\cup S_2\cup S_3$, S_i 与 $\mathbf{R}^3$ 中平行于 Descartes 坐标轴 $ox_i(i=1,2,3)$ 之任何直线皆仅有有限个交点 (W. Sierpiński 1951[68]; *cp*. [70], 397).

(2) $\mathbf{R}^3=S_1\cup S_2\cup S_3$, S_i 与 $\mathbf{R}^3$ 中垂直于 Descartes 坐标轴 $ox_i(i=1,2,3)$ 之任何平面皆至多有可数个交点([68]; *cp*. [70], 378).

(3) 非 0 实数全体之集 $\mathbf{R}\sim\{0\}=\bigcup_{n\in\omega}H_n$, 其中 $\forall n\in\omega$, H_n 为 $\mathbf{R}$ 中之一 **Hamel 基**(极大有理线性无关子集) (P. Erdös & S. Kakutani 1943[15], 459, *Th*.2).

(4) 存在序型为 ω_1 之超限序列 $\langle N_\xi|\xi<\omega_1\rangle$, $\forall\xi<\omega_1$, N_ξ 皆为自然数之无限集；对自然数之每个无限集 A，恒有 $\alpha<\omega_1$ 使 $|N_\alpha\sim A|<\aleph_0$ (F. Rothberger 1948, [58], 33; *cp*. [70], 450).

Cantor 于 1883 年隐含地猜测成立 $2^{\aleph_1}=\aleph_2$, F. Hausdorff 于 1908 年 ([25]) 首先提出更一般的命题："对每个 aleph $\mathfrak{a}$, $2^{\mathfrak{a}}=\mathfrak{a}^+$, 亦即 $\forall$ 序数 α, $2^{\aleph_\alpha}=\aleph_{\alpha+1}$"；是即所谓"广义连续统假设 (GCH)". GCH 还可以用另一种方式提出："对每个无穷基数 $\mathfrak{m}$ 不存在任何基数 $\mathfrak{n}$ 满足 $\mathfrak{m}<\mathfrak{n}<2^{\mathfrak{m}}$".

定理 5.1 (A. Lindenbaum et A. Tarski 1926[43]; 证明见 W. Sierpiński 1947[67]). ($\forall$

© 1994-2011 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

无穷基数 m，不存在基数 n 使 $m < n < 2^m$)$\longleftrightarrow$(AC)$\wedge$($\forall$ 序数 $\alpha, 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$).

此定理亦可由以下之定理 5.2 及良序定理与 AC 之等价性得出.

定理 5.2 (E. Specker 1954[75]). 若 m 为基数,且不存在基数 n 使 $m < n < 2^m$ 或 $2^m < n < 2^{2^m}$; 则 2^m 从而 m 为"可良序化之集之基数"[一称"良序基数"].

定理 5.3 (H. Rubin 1960[59]). ($\forall$ 序数 $\alpha, 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$) $\rightarrow$ AC.

此定理之条件蕴涵"每个良序集之幂集必可良序化"(§2(5)),故蕴涵 AC. 但 §2(5) 蕴涵 AC 之证明要用即将在 §6 中提到的 ZF 集论中的基础公理 VI，有些数学家宁愿用 AC 而不愿用它. 由定理 5.1 及 5.3 得到:

定理 5.4 GCH 之两种定义在 ZF 中等价. GCH $\rightarrow$ AC.

定理 5.5 (*cp*. [42], 139—140). GCH$\longleftrightarrow$($\forall$ 序数 α, $\beth_\alpha = \aleph_\alpha$), 其中 beth 函数 $\beth_\alpha$ 之定义为 $\beth_0 = \aleph_0$, $\beth_{\alpha+1} = 2^{\beth_\alpha}$, 对极限序数 γ 定义 $\beth_\gamma = \sup_{\alpha<\gamma} \beth_\alpha$.

定理 5.6 (*cp*. [42], 189). GCH $\rightarrow$ $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \begin{cases} \aleph_\alpha, & \text{若 } \aleph_\beta < cf\aleph_\alpha, \\ \aleph_{\alpha+1}, & \text{若 } cf\aleph_\alpha \leqslant \aleph_\beta \leqslant \aleph_\alpha, \\ \aleph_{\beta+1}, & \text{若 } \aleph_\alpha \leqslant \aleph_\beta. \end{cases}$

定理 5.7 (cp. [42]190). (GCH)$\wedge$(κ 为极限序数，$\langle \mathfrak{a}_\lambda | \lambda < \kappa \rangle$为非零基数之增加列，$\mathfrak{a} = \sup_{\lambda<\kappa} \mathfrak{a}_\lambda$) $\rightarrow \Pi_{\lambda<\kappa} \mathfrak{a}_\lambda = \mathfrak{a}^+$.

§6. Zermelo-Fraenkel 集论公理系统（ZF）

要弄清 AC 与 CH 是否可信,首先应有一些共同承认的前提，亦即承认某一公理系统. 早在十九世纪末与二十世纪初出现朴素集论时，一些悖论的被发现就已表露出集论之公理化研究的必要. Cantor 于 1895 年发现，若考虑全体序数所成之"集" u，则对序数之大小次序<而言，u 为一良序集,故 u 为一序数,它大于 u 之任何元;但按 u 之定义应有 $u \in u$，故得 $u > u$! 他于 1896 年将此结果告诉 Hilbert. C. Burali-Forti 于 1897 年又重新发现此悖论并发表于文[6]中,因而以"Burali-Forti 悖论"为人所知. Cantor 于 1899 年又注意到，若考虑全体集合之"集" u，令 u 之幂集为 $P(u)$，则必 $|P(u)| > |u|$；但按 u 之定义应有 $P(u) \subseteq u$，从而又应有 $|P(u)| \leqslant |u|$! 但直到 1932 年才发表于他的文集[8]中. B. Russell 于 1901 年 6 月在 Cantor 的这一悖论的启发下,造出一个很初等的悖论：令 u 为满足 $x \notin x$ 之集 x 之全体所成之"集"，则按 u 之定义立见 $u \in u \longleftrightarrow u \notin u$! 这一悖论之证明未用任何集论公理，是个纯粹逻辑上的矛盾. 与此同时 Zermelo 及其周围的人在 Göttingen 也独立地讨论了此同一悖论. Russell 将此悖论发表于 1903 年出版的书[61] Ch. *X*§78 中. 他曾于 1902 年将此结果函告 G. Frege, 当时 Frege 正准备发表在 Cantor 的直观集论基础上改造算术的文章，此信的突然打击使他暂停发表该文. 这个悖论引起了数学界和逻辑界的震动,推动了公理集论的发展. 首先是 Zermelo 于 1908 年提出一个公理系 (Z), A. A. Fraenkel 于 1922 年将其扩大,并加强了 Zermelo 的分离公理(即子集合公理),从而形成了 Zermelo-Fraenkel 公理系统 (ZF 系统). ZF 中的集合是受公理约束的对象,上述那些悖论中出现的特定对象之"类"不是 ZF 中的集合.

另一种消除悖论的方法是由 J. von Neumann 于 1925 年设计的,于 1937 年为 P. Ber-

© 1994-2011 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

nays 所修改，最后又于 1940 年为 K. Gödel 所修改．按这种观点，“大集合”(即相对于由公理界定出来的“最初的”那些集合而言是“大”的那些“集合”)并不有害，毛病出在将这种“大集合”考虑为[至少是隐涵地考虑为]某个“集合”之**元**．因此就应区分**集合**与**类**，任何一些集合之总汇称为一个**类**．若类 A 本身为某个类之元，则称类 A 为一集合，有些类不是集合(所谓“真类”)．这就排除了上述诸悖论，因其中所述之类并非集合．应注意，承认有比集合更广之类与 ZF 集论并无矛盾．

首先简介一下集论之基本语言，采用关于相等谓词＝的**一阶谓词演算**，其中只有一种用小写拉丁字母 $x, y, \cdots$ 表示的集合变元；这种集论语言由**从属关系** $\in$ 这个二元谓词组成．集合完全由其元所确定，而无任何其它结构．

基本语言是由**原子公式** $x = y$ (x 等于 y) 及 $x \in y$ (x 属于 y，或 x 为 y 之元)经语句联词 $\neg$(非)，$\vee$(或)，$\wedge$(与)，$\rightarrow$(蕴涵，若…则)，$\longleftrightarrow$(当且仅当)，及量词 $\exists$(存在一个)，$\forall$(对任一个)等而得之全部**公式**，以小写希腊字母 $\varphi, \phi, \chi, \cdots$ 表之．可仅考虑联词 $\neg$ 及 $\vee$ 为原始联词，$\exists$ 为原始量词．此时 $\varphi \wedge \phi$ 为 $\neg(\neg\varphi \vee \neg\phi)$，$\varphi \rightarrow \phi$ 为 $\neg\varphi \vee \phi$，$\varphi \longleftrightarrow \phi$ 为 $(\neg\varphi \vee \phi) \wedge (\neg\phi \vee \varphi)$，$\forall x\varphi$ 为 $\neg\exists x\neg\varphi$．但为方便起见，不仅不减少联词和量词，反而以 $x \neq y$ 表 $\neg x = y$，以 $x \notin y$ 表 $\neg x \in y$，以 $\exists! x\varphi$ 表存在唯一之 x，φ，意即 $\exists y \forall x(x = y \longleftrightarrow \varphi)$，以 $(\exists x \in y)\varphi$ 表 $\exists x(x \in y \wedge \varphi)$，以 $(\forall x \in y)\varphi$ 表 $\forall x(x \in y \rightarrow \varphi)$．左，右括号(，)的隔断作用和它们分层次左右配对的规则如熟知的那样．若变元 x 在公式 φ 中出现，但 $\forall x$ 及 $\exists x$ 不在 φ 中出现，则称 x 为 φ 之**自由变元**；若在 φ 中出现 $\forall x$ 或 $\exists x$，则称 x 为 φ 之**约束变元**．没有自由变元之公式称为**命题**．公式及命题统称为**语句**．以 $\varphi(x)$ 表以 x 为一可能的自由变元之公式(但 φ 可能还有别的自由或约束变元)．

一些公式所成之集称为**理论**，这些公式称为该理论之**公理**．若 T 为理论，则 $T \vdash \varphi$ 表示“由 T 可证出 φ”，此时 φ 称为 T 中之一**定理**．

ZF 集论之公理计有六条：

I 外延性公理 (G. Frege 1893)．$\forall z(z \in x \longleftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y$

意即，若 x 及 y 有相同之元，则 x 与 y 相等．其逆，当 x 等于 y 时 x 及 y 有相同之元为逻辑真理．

II 并公理 (G. Cantor 1899，E. Zermelo 1908)．$\forall x \exists y \forall z(z \in y \longleftrightarrow \exists u(z \in u \wedge u \in x))$．

意即，对每个集 x，存在由 x 之诸元之各元所成之并集 y．亦可记为“$\{z \mid \exists u(z \in u \wedge u \in x)\}$ 为一集”，或记为“$\cup x$ 为一集”．

定义 (i) $x \subseteq y \longleftrightarrow \forall z(z \in x \rightarrow z \in y)$，此时称 x 为 y 之**子集**，亦称 y **包含** x．(ii) $x \subset y \longleftrightarrow x \subseteq y \wedge \exists z(z \in y \wedge z \notin x)$，此时称 x 为 y 之**真子集**，或 y **真包含** x．

III 幂集公理 (E. Zermelo 1908)．$\forall x \exists y \forall z(z \in y \longleftrightarrow z \subseteq x)$．

意即，对每个集 x，存在由 x 之全体子集所成之集 y．亦即“$y = \{z \mid z \subseteq x\}$ 为一集”．称 y 为 x 之**幂集**，以 $P(x)$ 表之．

定义　若公理中包含可变之公式，此时该公理非为单个语句，而是无穷多个语句；称这种公理为**公理格式**．当**给定**其中之可变公式时所得之单个语句称为此公理格式之一**实例**，亦称“一个这种公理”．

© 1994-2011 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

IV 代换公理(-格式) (A. A. Fraenkel 1922, T. Skolem 1923. 更早是 G. Cantor 在 1899 年,及 D. Mirimanoff 在 1917 年非正式提出的). $\forall u\forall v\forall w(\phi(u,v)\wedge\phi(u,w)\to v=w)\to\forall x\exists y\forall v(v\in y\longleftrightarrow(\exists u\in x)\phi(u,v))$, 其中 $\phi(u,v)$ 为一公式; w 及 y 非为 ϕ 之自由变元, 而 $\phi(u,w)$ 为在 $\phi(u,v)$ 中以 w 代换 v 所得之公式, $\phi(u,v)$ 还可能有 u,v 以外的其它自由变元.

代换公理(-格式)的前提是对每个 u 至多有一个 v 使 $\phi(u,v)$, 故 v 为"u 之函数", 即存在一个未必"对每个 u 确定"之函数 F 使 $\phi(u,F(u))$ 在 F 有定义之处成立,而结论是对每个 x **存在**由 x 中 F 有定义之元在 F 作用下之象之全体之**集** y.

以上之公理 I—IV 都未假定集合之**无条件**地存在, I 中之 x,y 是假定其存在的,在 II—IV 中也都是假定存在 x, 则存在 $y\cdots$; 它们本身不能保证一定存在一个集 x. 在 ZF 中仅有下面即将提到的无穷性公理 V 断言存在一个集 x. 但因所用之语言为一阶谓词演算,其仅有之变元为集合;这种变元之定义域自然应假定为非空的 (否则这种语言就没有意义了). 故实际上已暗中承认存在一个(完全无结构的,仅由其元确定的)集合.

定理 6.1 (空集公理). 存在唯一的一个集合,它没有任何元.

证 由上述知存在一个集 x, 将代换公理中之 $\phi(u,v)$ 取为 $u\neq u$ 这一不成立的公式,则该公理所断言存在的集 y 没有任何元. 若另有一集 y' 亦无任何元, 则由外延性公理知 $y'=y$.

定义 (i) (G. Boole 1847, 1854) 称没有任何元之集为**空集**,以 0 表之. 至少有一个元之集称为**非空集**. (ii) 显然有 $x\subseteq 0\longleftrightarrow x=0$, 故 $\mathbf{P}(0)$ 为仅由 0 所成之单元集, 以 $\{0\}$表之. $\mathbf{P}(\mathbf{P}(0))=\mathbf{P}(\{0\})$ 为仅由 0 及$\{0\}$所成之二元集,以$\{0,\{0\}\}$表之.

定理 6.2 (配对公理). $\forall s\forall t\exists y\forall e(e\in y\longleftrightarrow e=s\vee e=t)$. 即对任意之二集 s 及 t, 必存在仅由 s 及 t 二元所成之集 y.

证 于代换公理中取 $\phi(u,v)$ 为 $(u=0\wedge v=s)\vee(u=\{0\}\wedge v=t)$, 取 $x=\{0,\{0\}\}$, 则得 y 为仅由 s 及 t 二元所成之集.

定义 (iii) 将配对公理中所得之仅由 s 及 t 二元所成之集 y 表为 $\{s,t\}$, 称之为 s,t 所成之**对**. (iv) 集 $\{s,s\}$ 仅由单个元 s 构成,以 $\{s\}$ 表之,称为由 s 所成之**单元集**.

定理 6.3 (子集[分离]公理-格式). $\forall x\exists y\forall z(z\in y\longleftrightarrow z\in x\wedge\varphi(z))$, 其中 y 非为 $\varphi(z)$ 之自由变元. 即对每个集 x 恒存在由满足 $\varphi(z)$ 之 x 中的元 z 之全体所成之集 y.

证 取代换公理中之 $\phi(u,v)$ 为 $\varphi(u)\wedge u=v$, 则其中之 y 即为本定理所求.

显然,空集 0 之存在亦可由子集公理取 $\varphi(z)$ 为 $z\neq z$ 而推出. 尽管配对公理可由代换公理结合外延与幂集二公理得出, 子集公理可由代换公理直接推出. 但许多文献仍将它们列入公理系统之中. 因按 ZF 系统研究公理集论时, 一开始就会不可避免地要用这两条公理,而代换公理要到后来讨论较高深的论题时才用得着. 文献中常见的 Zermelo 公理系统 (Z) 就是在 ZF 的六条公理中以这两条公理代替代换公理(有时加上 AC, 或以 AC 代替基础公理)而得的公理系统.

V 无穷性公理 (E. Zermelo 1908). $\exists x(0\in x\wedge(\forall y\in x)(\forall z\in x)(y\cup\{z\}\in x))$.

定义 (v) (A. N. Whitehead & B. Russell 1912). 给定一集 a, 令 $u\subseteq\mathbf{P}(a)$. 若 $0\in u\wedge(\forall x\in u)(\forall y\in a)(x\cup\{y\}\in u)$, 则称 u 为 a **之子集所成之归纳集**. 当 a 之子集所

© 1994-2011 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

成之每个归纳集皆以 a 为一元时，称 a 为**有限集**．非有限之集称为**无限[无穷]集**．

在承认 ZF 中的公理 I—IV 的前提下，可证无穷性公理 V 等价于"存在一个无穷集"．但仅从公理 I—IV，甚至再加上下面的公理 VI—VII，不能推出存在无穷集．而无穷集之存在是集论的基本宗旨之一．

VI 基础[正则性]公理-格式 (D. Mirimanoff 1917，T. Skolem 1923，J. von Neumann 1925)．$\exists x\varphi(x) \rightarrow \exists x(\varphi(x) \wedge (\forall y \in x)\neg\varphi(y))$，其中之 y 在 $\varphi(x)$ 中不自由．

$\forall a \neq 0$ 于 VI 中取 $\varphi(x)$ 为 $x \in a$，即得 VI 之等价形式：

VI* 基础[正则性]公理之局部形式 (P. Bernays & K. Gödel, cp. P. Bernays 1948, [4]VI,68)．$\forall a(a \neq 0 \rightarrow (\exists x \in a) \wedge (x \cap a = 0))$．

公理 VI* 说明，$\neg(\exists y \in a)(y \in x)$，故对从属关系 $\in$ 而言，x 为 a 中之"极小元"，即 x 为 a 之一"基础"．

以上之公理 I—VI 即所谓 ZF 集论公理系统．

VII 选择公理 (E. Schmidt-E.Zermelo 1904)．$\forall s(\forall x(x \in s \rightarrow \exists z(z \in x) \wedge \forall y(y \in s \wedge y \neq x \rightarrow \neg\exists z(z \in x \wedge z \in y))) \rightarrow \exists c\forall x(x \in s \rightarrow \exists v\forall u(u = v \longleftrightarrow (u \in c \wedge u \in x))))$．

以上是 §2(2) 形式的 AC 之形式语言表示． ZF 系统再加上 AC，亦即公理系统 I—VII，称为 ZFC．由于 T. Skolem 对 ZF 系统的重大贡献，有时亦称 ZF 集论为"ZFS 集论"，有些人亦称由公理 I—V，VII 所成之系统为 ZF 集论．但仅由公理 I—V，VII 还不能解决"是否存在集 x 满足条件 $x \in x$"这个集论中简单而基本的问题，引进基础公理 VI 就能解决这一问题．

定理 6.4 (i) $\forall x(x \notin x)$，(ii) $\forall x\forall y(x \in y \rightarrow y \notin x)$．

证 (i) 由配对公理 6.2 及其后之定义 (iv) 知 $\forall x\exists a(a = \{x\})$；故由基础公理 VI* 知 $x \cap \{x\} = x \cap a = 0$，即 $x \notin x$．(ii) 设 $x \in y$，由配对公理 6.2 及其后之定义 (iii) 知 $\exists a = \{x, y\}$；由基础公理 VI* 知 $x \cap a = 0 \vee y \cap a = 0$．由 $x \in y$ 之假设知 $y \cap a = \{x\} \neq 0$，从而必 $x \cap a = 0$，故 $y \notin x$．

由此定理之 (i) 知 Cantor 与 Burali-Forti 悖论中"全体序数之集 u"在 ZF 中并不存在；因若 u 为集，则 u 必为良序集，故 u 亦必为序数，从而 $u \in u$！又 Cantor 悖论中"全体集合之集 u"亦不存在；因若 u 为集，则应有 $u \in u$！Russell 悖论中之 $u = \{x | x \notin x\}$ 亦非集，因由定理中之 (i) 知 $\forall x(x \notin x)$，故此 u 即为 Cantor 悖论中"全体集合之集 u"，已知此 u 非为 ZF 中之集．

ZFC 之七条公理中，除基础公理 VI 以外的那六条公理在集论及整个数学的发展中都是举足轻重的．去掉公理 I 虽不致使数学的任何领域出现危机，但会使集论与数学的发展极为不便；而去掉其余五条中的任一条都意味着抛弃了集论与数学中的某些重要领域．就基础公理而言，情况略有不同，从 ZFC 中去掉它不会使数学之任何部门受到重大影响，但它对集论基础的研究是很关重要的．

§7. AC 及 CH[GCH] 之相容性与独立性

若在公理系统(即理论) Σ 中推不出矛盾来，则称 Σ 为**相容 [无矛盾]** 的．若由 Σ 之相

© 1994-2011 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

容能推知加进公理 A 后之系统 $\Sigma+A$ 亦为相容,即 $\Sigma \not\to \neg A$, 则称 A **对于 Σ 为相容**. 若 A 及 $\neg A$ 皆对于 Σ 为相容,则称 A **对于 Σ 为独立**.

K. Gödel 于 1938 年文[20]中证出,若 ZF 为相容,则 ZF + AC + GCH 亦相容(即 ZF$\not\to\neg$AC$\vee\neg$GCH),故 AC 与 GCH 皆对于 ZF 为相容. 虽然在数学中 CH 除对集论本身外影响不大,而 AC 对整个数学的影响是很深广的;所以, Gödel 的结果至少可以使人放心,因为 AC 与 CH 并不比集论中的其它公理更不可靠. 如果 ZF + AC + GCH 有矛盾,那么这种矛盾必然出在 ZF 之中. 是否 ZF $\to$ AC$\vee$CH 呢? 又过了二十五年之久才由 P. Cohen 于 1963 年的文[9],[10] 中证明了 $\neg$AC 及 $\neg$CH 对于 ZF 的相容性,即 ZF$\not\to$AC$\vee$CH [更不必说 ZF $\to$ GCH 了],从而 AC 及 CH 皆对于 ZF 为独立.

与证明几何中平行公理的相容性相似,为证公理 A 对于公理系 Σ 之相容性,应造一 Σ 之模型在其中 A 亦成立. Gödel 造出 ZF 之两种模型: 第一种是**可构成集**之全域 L, 即以 ZF 为基础从空集出发,按 ZF 中之运算经超限归纳而得的包含全部序数之最小可递模型. 第二种是**遗传序数可定义集**之全域 HOD, 即以 ZF 为基础考虑其中可由以一些序数为参数之公式来定义的集合, 此集之元亦可如此定义, 而这些元之元又可如此定义(遗传性), …, $L\subseteq$HOD. 这两种可递模型中之集都可按自然方式排成良序, 故 AC 在它们中都成立;事实上,GCH 亦在它们中成立. Cohen 引进了造模型的强有力的新方法-**力迫法**. 其大意是,既然在 Gödel 的模型中 AC 及 GCH 都是定理, 为在此基础上造出使 AC 及 CH 皆不成立之模型,必须在原模型中加入新的集(例如**不可构成集,非 HOD 集**等)并要求在扩大了的新模型中 ZF 仍然成立,但 AC 及 CH 皆不成立. 有关力迫法的详情除 Cohen 的原著[9]—[11]外,可参阅 T. J. Jech 的书[33]及[32]. 概括说来,若 ZF 为相容,则

(1) ZF + AC + CH,

(2) ZF + AC + $\neg$CH,

(3) ZF + $\neg$AC + CH,

(4) ZF + $\neg$AC + $\neg$CH

皆为相容,其中(1)是 Gödel [20] 的结果;(2)及(4)是 Cohen [9],[10] 中证出的,Cohen 对情况(3)未感兴趣,但用他的方法亦可同样地证出(3)来(参见[11]之俄译本第 201 页之译者注 2).

由 Gödel 的结果知 GCH 对于 ZFC 为相容,特别 $2^{\aleph_0}=\aleph_1$ 对于 ZFC 为相容. 而由 Cohen 1964, [9]II, p.109 之引理 21 推知 $2^{\aleph_0}=\aleph_2$, $2^{\aleph_0}=\aleph_{\omega+1}$, $2^{\aleph_0}=\aleph_{\omega^2+1}$, $\cdots$, $2^{\aleph_0}=\aleph_{\omega_1}(\omega_1=\aleph_1)$ 中的任一等式亦对于 ZFC 为相容(在 R. M. Solovay 1963, [71] I 中得同一结果). 更值得注意的是从[9]的引理 21 及 22 (或[71]II) 知 $2^{\aleph_0}=\aleph_2=2^{\aleph_1}$ 亦对于 ZFC 为相容,这就正面解决了 Лузин 在 1935 年提出的著名猜想. 在 H. H. Лузин 1935, [44]§9 中说到,在数学文献中不时暗示另一种连续统假设的可能性, 即 $2^{\aleph_0}=2^{\aleph_1}$; 并声称他不打算考据是谁最先猜想此等式之成立为可能的,而暂且称之为"第二连续统假设";他觉得这应和"第一连续统假设"(即 CH) 一样地无矛盾. 由 Solovay 1963,[71]II 知如下之更一般的命题对于 ZFC 亦为相容:"令 $n_0\leqslant n_1\leqslant\cdots\leqslant n_k$ 为 $k+1$ 个非负整数, 又非负整数 $i\leqslant n_i(0\leqslant i\leqslant k)$, 则 $2^{\aleph_i}=\aleph_{n_i}$ $(0\leqslant i\leqslant k)$ **同时**成立". 当 $k=1, n_0=$

© 1994-2011 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$n_1 = 2$ 时即为 Лузин 猜想. 在上述之情况(1)及以下之注记 (i) 中所述的 (3*) 之情况下,皆有 $2^{\aleph_0} = \aleph_1 < 2^{\aleph_1}$, 故此时 Лузин 猜想不成立. 从而 Лузин 猜想对于 ZF 公理系为独立.

注记. (i) Cohen 诸文中所述之连续统假设是指 $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, 我们以 CH_* 表之. 故 Cohen 实际上证出的是在(2)—(4)中以 CH_* 代换 CH 而得之 (2_*)—(4_*) 之相容性.已知在 ZF 中 $CH_* \to CH$, 而在 ZFC 中 $CH \to CH_*$ (cp.[70]376). 既在 ZFC 中 $CH_* \longleftrightarrow CH$, 故在(1),(2)中用 CH 或 CH_* 都是一样的. 又因在 ZF 中 $CH_* \to CH$,故由 (3_*)之相容推知(3)之相容. 现证(4)之相容性(据[11]之俄译者 A. C. Есенин-Вольпин 所加之"补充 II"): 在 Cohen 1966,[11],138 中证明了存在 ZF 之一模型 N, 其中全体实数之集 c 有一无限子集 d, d 为 D-有限 (cp. 本文 §9(2) 前之定义). 易见在 c 中有与 d 不相交之可数子集 a. 显然 $a \subset a \cup d \subseteq c$, 从而 $\aleph_0 \leqslant \aleph_0 + |d| \leqslant |c| = \mathfrak{T} = 2^{\aleph_0}$. 因 d 为 D-有限之无限集, 故必 $\aleph_0 < \aleph_0 + |d|$. 又因在 ZF 中 $\mathfrak{T} + \mathfrak{T} = \mathfrak{T}$, 故若 $\aleph_0 + |d| = \mathfrak{T}$, 则必有 a_1, d_1, a_2, d_2; $|a_1| = |a_2| = |a| = \aleph_0$, $|d_1| = |d_2| = |d|$; $a_1 \cap d_1 = a_2 \cap d_2 = (a_1 \cup d_1) \cap (a_2 \cup d_2) = 0$; 及 $(a_1 \cup d_1) \cup (a_2 \cup d_2)$ 与 $a \cup d$ 间之(1-1)映射 f. 因 d 为 D-有限,故存在三个有限集 $m \subset d$, $m_1 \subset d_1$, $m_2 \subset d_2$; f 亦为 $(d_1 \sim m_1) \cup (d_2 \sim m_2)$ 与 $d \sim m$ 间之(1-1)映射. 显然 $d_2 \sim m_2$ 为无限集, 故不用 AC 可知有 $m_3 \subset d_2 \sim m_2$, $|m_3| = |m_1|$; 从而 $|d_1 \cup (d_2 \sim (m_2 \cup m_3))| = |d \sim m|$. 由 $|d_1| = |d|$ 知有 $d_1' \subseteq d_1$, $|d_1'| = |d \sim m|$; 从而 $|d_1 \cup (d_2 \sim (m_2 \cup m_3))| = |d_1'|$. 合显然之事实 $d_2 \sim (m_2 \cup m_3) \neq 0$ 立见 $d_1 \cup (d_2 \sim (m_2 \cup m_3))$ 与其真子集 d_1'(1-1)对应, 故 $d_1 \cup (d_2 \sim (m_2 \cup m_3))$ 非为 D-有限,它必有可数子集,从而 d_1 或 d_2 有可数子集,此与 d_1 及 d_2 皆为 D-有限矛盾! 即应有 $\aleph_0 + |d| < \mathfrak{T}$. 故已证 $\aleph_0 < \aleph_0 + |d| < 2^{\aleph_0}$, 即 $\neg CH$ 成立.

(ii) 与连续统有关之另一名题是 M. Суслин 于 1920 年在[74]中提出的,这与前述诸名题同属集论中为数无多的难题之列. 令 $(s, <)$ 为线性有序集. 若 $(s, <)$ 无最大及最小元,则称其**无端点**.若 $(\forall a \in s)(\forall b \in s)(a < b \to (\exists c)(a < c < b))$, 则称 $(s, <)$ **无跳跃**. 若 $(s, <)$ 之非空子集 t 有上界时, t 亦必有上确界, 则称其**无空隙**. "Суслин 问题" 是: "令 $(s, <)$ 无跳跃及空隙 (即**连续**)、无端点, 其非空不相交开间所成之任何集至多为可数,此时它与实数连续统有相同之序型(即**相似**)吗? "这种 $(s, <)$ 与连续统相似之猜想称为 "Суслин 假设" (简记为 SH). 当 s 为连续统, $<$为实数之自然次序时,无跳跃即为**稠**,无空隙即为**完备**, 不相交开间之集至多为可数即为**可分性**. 由经典的 Cantor 定理知当线性有序集 $(s, <)$ 无端点,稠,完备且可分(即存在可数集 $s_1 \subseteq s$, s 中任何开间必含有 s_1 之元)时必相似于连续统 ([70] XI, 10). 当将定理之"可分"改为 SH 中要求的"互不相交之开间至多有可数个"时, 情况就大不相同了. S. Tennenbaum 1968, [80] 与 T. J. Jech 1967,[30] 中得到如下结果: 若 ZF 为相容,则

$$(S\text{-}1) \qquad ZFC + GCH + \neg SH,$$

$$(S\text{-}2) \qquad ZFC + \neg CH + \neg SH$$

亦皆为相容. R. B. Jensen 1968, [36]; 1972, [37] 中证出,当 ZF 为相容时,

$$(S\text{-}3) \qquad ZFC + GCH + SH$$

亦为相容. R. M. Solovay, & S. Tennenbaum 1971,[73] 中证出,若 ZF 为相容,则

© 1994-2011 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

(S-4) ZFC + ¬CH + SH

亦为相容.

(iii) 是否 ZFC 之七条公理中的任一条都对于其余六条相容和独立呢? 实际上, Gödel 在证明 AC 之相容性时已同时证出了基础公理对于其余六条公理之相容性; 本质上他已证出了更强的结果,即当公理 I—V 相容时 ZFC 亦相容,亦即公理 VI—VII 对于 I—V 为相容 (J. C. Shepherdson 1951[64], 164—165; L. Rieger 1957[55]). 此外, 可证基础公理 VI 对于其余六条公理为独立; 不仅此, 从其余六条公理甚至证不出 $\forall x(x \notin x)$ 来;有关这些结果的最漂亮的证明见[55].但公理 II—V 中任何一条对于 ZFC 中其余六条公理的相容性是不可证明的. 因若令 A 表此四条公理之一,则在 ZFC 中**可证** ZFC－A (即从 ZFC 中去掉 A) 为相容 (A. A. Fraenkel et al. 1973, [19]102, 327—329). 若从 ZFC－A 为相容能证出 ZFC 相容,则由 ZFC 可证其自身为相容. 但由 Gödel 的"相容性证明定理"(一称"第二不完全性定理")知此为不可能. 可是 ¬A 对于 ZFC－A 之相容性 (即 (ZFC－A)$\nvdash A$) 是可以证明的. 因若由 ZFC－A 可证出 A, 则由 ZFC－A 为相容可证出 ZFC 为相容. 既已知由 ZFC 可证出 ZFC－A 为相容, 从而由 ZFC－A 可证出其自身为相容,这又不合于 Gödel 的相容性证明定理. 故当 ZFC－A 相容时证不出 A,即 ¬A 对于 ZFC－A 为相容. 关于外延性公理 I 对于 ZFC 中其余六条公理之相容性和独立性问题,已知有如下结果.若 ZFC 为相容, 则 I 对于 II—VII 为独立 (A. Robinson 1939[56]); 由 I—V 可证出 II—V 之相容性, 故由同上之理由知 I 对于 II—V 之相容性不可证明 (D. Scott 1962[63], 130). ZF 集论本身之相容性迄今未获证明,尽管大多数人相信这一点.

有关 §§4—7 之内容, 特别是公理集论之系统讨论, 可参看 A. A. Fraenkel et al. 1973[19]; A. Levy 1979[42] 这两本书.

§8. 没有 AC 的数学

如果称 ZF + ¬AC 为"非标准集论",则在此基础上的数学可称为"非标准数学". 在 §3 中列举了在其证明中用到 AC 的许多熟知命题,本节将说明, 在非标准数学中这些命题未必成立. 在 ZF 中存在各种模型使 §3 中各命题不成立. 为便于对照起见, 与 §3 中对应之命题用同一编号.

(1) 全体实数之集为可数个可数集之并集 (S. Feferman & A. Levy 1963[17]).

定义. 若集 x 不与其真子集(1-1)对应,则称 x 为 Dedekind 有限 (D-有限) 集. 显然,有限集必为 D-有限. 又在 ZF 中易证, x 为 D-有限当且仅当 x 无可数子集.

(2) 存在实数之无限集,它没有可数子集(在 Cohen 之基本模型中即有这种 D-有限的实数无限集, cp. T. J. Jech[32], 142—144).

(3) 当全体实数之集为可数个可数集之并时(例如在使(1)成立之模型中), ω_1 为可数序数之可数列的极限 (cp. [32],148).

(4) 存在一线性空间, 它没有基 (H. Läuchli 1963[40], T. J. Jech & A. Sochor 1966[34]).

© 1994-2011 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

(5) 存在一线性空间,它有两个基数不同之基 (loc. cit.).

(6) 存在一个域,它没有代数闭包 (H. Läuchli 1963[40], D. Pincus 1972[53]).

因 §3 之(7),(8)等价,故以下之(7),(8)亦然.

(7) 存在一 Boole 代数,它没有素理想[超滤子] (A. R. D. Mathias 1967[47]).

(8) 存在一 Boole 代数,它不与任何集合代数同构.

(9) Hahn-Banach 延拓定理不成立 (R. M. Solovay 1970[72]; D. Pincus 1972[54]).

(10) 存在 Boole 代数 B,在 B 上不能定义非负,归一化,有限可加测度.(由 §3 之对应命题知此处之(9)与(10)等价.)

(11) Крейн-Мильман 定理不成立 (D. Pincus 1972[54]).

(12) 实直线 $\mathbf{R}$ 作为可分距离空间有一子空间不可分 (W. Sierpiński 1918[66]; M. Jaegermann 1965[29]; T. J. Jech 1968[31]; 由(2)知 D-有限实数无限集即为一例).

(13) Урысон 引理不成立 (H.Läuchli 1963[40], T. J. Jech & A. Sochor 1966[34]).

(14) Borel 集之超限分类序列 $\langle B_\xi | 0 \leqslant \xi < \omega_1 \rangle$ 非为严格单增(此由(1)可立见).

(15) Lebesgue 测度非为可数可加(由(1)立见).

(16) 每个实数集皆为 Lebesgue 可测 (R. M. Solovay 1965, 1970, [72]).

(17) 每个实数集皆有 Baire 性质 (loc. cit.).

(18) 若实变元有限实函数为可加,则亦必为连续 (loc. cit.).

注记. 使(16)—(18)成立之 Solovay 模型中相关选择原理 DC (从而 AC_ω) 成立,故 Lebesgue 测度论与描述性集论之全部基本结果都能证出来,并且不存在诸如 Lebesgue 不可测集,不具 Baire 性质之集,可加而不连续之实变元实函数等引起不便的现象.所以,对分析工作者说来, Solovay 模型之全域是很有趣的.

(19) 存在实数集 A 及实数 $a \notin A$, a 之任何邻域中恒有 A 之点 [即 $a \in \overline{A}$(A 之闭包)],但 A 中无任何点列 $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$ (取(2)中之 D-有限的实数无限集 S, 若 S 中仅有孤立点,此时易见 S 为可数集,此与 S 为 D-有限之事实矛盾,故 S 必有一聚点 a. 取 $A = S \sim \{a\}$ 即合所求).

(20) 存在既不有界又不闭之实数集 T, T 中每一点列必有收敛子列((19)中之 A 仅可能有有限个孤立点,去掉它们后所得之集 A_1 仍为 D-有限. 开间 ($\inf A_1, \sup A_1$) 之端点必皆为 A_1 之聚点. 用同胚变换将此开间变为 $(-\infty, +\infty)$, 则 A_1 在此同胚下之象 T 即合所求).

(21) 存在 $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x_0 \in \mathbf{R}$, $f(x)$ 在点 x_0 处为 (HC) 但非 (CC) (取 (19) 中之 A 并以其中之 a 为 x_0. 定义 $f(x)$ 为集 A 之特征函数,因 $f(x_0) = 0$, 故在 $x = x_0$ 处 $f(x)$ 非为 (CC). 但若 $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0$, 则因 A 为 D-有限集,且 x_0 为 A 之聚点, $x_0 \notin A$; 故必 $\exists N > 0$, 当 $n \geqslant N$ 时 $x_n \notin A$, 即 $f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x_0)$. cp. M. Jaegermann 1965[29]).

有关本节题材的更详细的讨论可参看 T. J. Jech 1973[40], Chap. 10.

参　考　文　献

[1] Bagemihl, F., A theorem on intersections of prescribed cardinality, *Ann. of Math.* **55**(1952)

© 1994-2011 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

34—37.
[2] Banach, S. et Tarski, A., Sur la démonstration des ensembles des points en parties respectivement congruents, *Fund. Math.*, **6**(1924), 244—277.
[3] Bell, J. L. & Fremlin, D. H., A geometric form of the axiom of choice, ibid. **77**(2) (1972) 167—170.
[4] Bernays, P., A system of axiomatic set theory, III, J. S. L. 7(1942) 65—89; VI, J. S. L. **13** (1948), 65—79.
[5] Bourbaki, N., Eléments de Mathématique, Partie I-Livre I, Théorie des ensembles, fascicule de resultats, Actualités Sc. et Ind. 846, 1939 (Deuxième édition 1951).
[6] Burali-Forti, C., Una questione sui numeri transfiniti, Rendic. Palermo **11**(1897), 154—164, **260** (English translation in van Heijenoort 1967, [27] 104—112).
[7] Cantor, G., Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre, J. f. reine u. angew. Math. **84**(1878), 242—**285** (also in 1932, [8] 119—138).
[8] ——————, Gesammelts Abhandlungen, Berlin 1932.
[9] Cohen, P. J., The independence of the continuum hypothesis, I; II: Proc. Net. Acad. Sci. U. S. A., **50**(1963) 1143—1148; **51**(1964), 105—110.
[10] ——————, Independence results in set theory. Proc. on "The Theory of Models" 1963 Intern. Sympos. Berkeley, Addison et al. (ed.), 1965, 39—54.
[11] ——————, Set Theory and the Continuun Hpothesis 1966
[Коэн, Пол. Дж., Теория Множеств и Континуум-Гипотеза (переводчик: А. С. Есенин-Вольпин), Москва 1969].
[12] ——————, and Hersh, R., Non Cantorian set theory, Scientific American, **217**(6) (1967), 104—116 (also reprinted in "Mathematics in the Modern World" 1968, pp. 212—220).
[13] Devlin, K. J., The Axiom of Constructibility, LNM 617, 1977.
[14] ——————, Johnsbråten, H., The Souslin Problem, LNM 405, 1974.
[15] Erdös, P. and Kakutani, S., On non-denumerable graphs, Bull. A. M. S. **49**(1943), 457—461.
[16] Feferman, S., Independence of the axiom of choice from the axiom of dependent choices (abstract), J. S. L. **29**(1964), 226.
[17] ——————, and Levy, A., Independence results in set theory by Cohen's method, II (abstract), Notices A. M. S. **10**(1963), 593.
[18] Fraenkel, A. A., Abstract Set Theory, (2nd ed.) 1961; (3rd ed.) 1966.
[19] ——————, Bar-Hillel, Y. and Levy, A., Foundations of Set Theory (2nd revised ed.) 1973.
[20] Gödel, K., The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis, Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A. **24**(1938), 556—557.
[21] ——————, Consistency proof for the generalized continuum hypothesis, ibid. **25**(1939), 220—224.
[22] ——————, The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis with the Axioms of Sot Theory, Ann. of Math. Studies, no. 3, Princeton 1940 (2nd printing. 1951).
[23] ——————, What is Cantor's continuum problem? *Amer. Math. Monthly*, **54**(1947), 515—525.
[24] Hartogs, F., Über das Problem der Wohlordnung, *Math. Annalen*, **76**(1915), 438—443.
[25] Hausdorff, F., Grundzüge einer Theorie der georneten Mengen, ibid. **65**(1908), 435—505.
[26] ——————, Grundzüge der Mengenlehre, 1914 (zweite Auflage 1927).
[27] Heijenoort, J. van., From Frege to Gödel——a source book in mathematical logic 1879—1931, 1967 (2nd printing 1971).
[28] Hilbert, D., Über das Unendliche, *Math. Annalen*, **95**(1925), 161—190 (English translation in van Heijenoort 1967, [27] 367—392).
[29] Jaegermann, M., The axiom of choice and two definitions of continuity, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Math. **13**(1965), 699—704.
[30] Jech, T. J., Nonprovability of Souslin's hypothesis, Comment. Math. Univ. Carolinae, **8**(1967), 291—305.
[31] ——————, Ein Bemerkung zum Auswahlaxiom, Časopis Pěst. Math. **93**(1968), 30—31.
[32] ——————, The Axiom of Choice, 1973.
[33] ——————, Set Theory, 1978.
[34] ——————, and Sochor, A., Applications of the $\mathfrak{G}$-model, Bull. Acad. Polon. Sci. sér. Math

© 1994-2011 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

14(1966), 351—355.

[35] Jensen, R. B., Independence of the axiom of depedent choices from the countable axiom of choise (abstract), J. S. L. **31**(1966), 294.

[36] ————, Souslin's hypothesis is incompatible with $V=L$, (abstract), Notices. A. M. S. 15 (1968), 935.

[37] ————, The fine structure of constructible hierarchy, *Ann. Math. Logic*, 4(1972), 229—308.

[38] Kelley, J. L., The Tychonoff product theorem implies the axiom of choice, Fund. Math. **37** (1950), 75—76.

[39] Kuratowski, K., Une méthode d'elimination des nombres transfinis des raisonnements mathématiques, ibid. **3**(1922), 76—108.

[40] Läuchli, H., Auswahlaxiom in der Algebra, Comment. Math. Helv. **37**(1963), 1—18.

[41] Levi, B., Intorno alla teoria degli aggregati Reale Institute Lombardo di Scienze e Lottere, Rendic. ser. 2, **35**(1902), 863—868 [cf. F. Bernstein, Nachr. Göttingen (1904), 557—560.

[42] Levy, A., Basic Set Theory, 1979.

[43] Lindenbaum, A. et Tarski, A., Communication sur les recherches de la théorie des ensembles, C. R. Soc. Sc. et Lett. de Vasovie, cl. III, **19**(1926), 299—330.

[44] Лузин, Н. Н., О некторых новых результатах дескриптивной теории Функций, 1935 (Н. Н. Лузин, Собрание Сочнений, П, 1958, стр. 552—616).

[45] Luxemburg, W. A. J., Reduced powers of the real number system and equivalents of the Hahn-Banach extension theorem, Intern. Sympos. on the Applications of Model Theory to Algebra, Analysis and Probability, Calf. Inst. Technol. 1967; Holt, Reinhart and Winston, Toronto, Ont. 1969, 123—137.

[46] Los, J. & Ryll-Nardzewski, C., On the application of Tychonoff's theorem in matthematical proofs, *Fund. Math.*, **38**(1951), 233—237.

[47] Mathias, A. R. D., On the order extension principle (abstract), Notices A. M. S. **14**(1967), 410.

[48] Mazurkiewicz, S., Sur un ensemble plan. C. R. Soc. Sc. et Lett. de Vasovie, **7**(1914), 382—383.

[49] ————, et Sierpinski, W., Sur un ensemble superposable avec chacune de ses deux parties, C. R. Paris, **158**(1914), 618—619.

[50] Moss, B., Beppo Levi and the axiom of choice, Historia Mathematica, **6**(1979), 54—56.

[51] Натансон, И. П., Теория функций Вещественной Переменной, второе издание, 1957 (первое издание, 1950).

[52] Peano, G., Démonstration de l'intégrabilité des équations différentielles ordinaires, *Math. Annalen*, **37**(1890), 182—228. (also in G. PEANO Opere Scelte. Roma, I, (1957), 119—170).

[53] Pincus, D. F., Zermelo-Fraenkel consistency results by Fraenkel-Mostowski methods, J. S. L. **37**(1972), 721—743.

[54] ————, The Strenth of the Hahn-Banach theorem, Victoria Sympos. on Nonstandard Analysis, Univ. of Victoria 1972, LNM **369**, 1974, 203—248.

[55] Rieger, L., A contribution to Gödel's axiomatic set theory I, Czechoslovak Math. J. 7(82) (1957), 323—357.

[56] Robinson, A., On the independence of the axioms of definiteness (Axiome der Bestimmtheit), J. S. L., **4**(1939), 69—72.

[57] Robinson, R. M., On the decomposition of spheres, *Fund. Math.*, **34**(1947), 246—266.

[58] Rothberger, F., On some problems of Hausdorff and of Sierpinski, ibid. **35**(1948), 29—46.

[59] Rubin, H., Two propositions equivalent to the axiom of choice only under both the axioms of extensionality and regularity (abstract), Notices A. M. S. 7(1960), 381.

[60] ———— & Rubin, J. E., Equivalents of the axiom of choice, 1963.

[61] Russell, B., The Principles of Mathematics I, 1903 (2nd ed. 1937, 1938, with a new introduction. Reprinted 1950).

[62] ————, On some difficulties in the theory of transfinite numbers and order types, Proc. London Math. Soc. Ser. 2, 4(1906), 29—53.

[63] Scott, D., More on the axiom of extensionality, Essays on the Foundations of Mathematics, dedicated to A. A. Fraenkel, edited by Y. Bar-Hillel et al. 1962, 115—131.

[64] Shepherdson, J. C., Inner models for set theory, J. S. L., **16**(1951), 161—190.

[65] Siegel, C. L. & Bellman, R., Transcendental Numbers, 1947.

© 1994-2011 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

[66] Sierpinski, W., L'axiome de M. Zermelo et son rôle dans la théorie des ensembles et l'analyse, Bull. Acad. Sc. Cracovie, Cl. Sc. Math. Sér. A, (1918), 97—152
[Серпинский, В. К., Аксиома Zermelo и ее роль в теории множеств и в анализе, Мат. Сб. 31 (1922—24), 94—128].
[67] ————, L'hypothèse généralisée du continu et L'axiome du choix, *Fund. Math.*, 34 (1947), 1—5.
[68] ————, Sur quelques propositions concernant la puissance du continu, ibid. 38(1951), 1—13.
[69] ————, Une genéralisation des théorème de S. Mazurkiewicz et F. Bagemihl, ibid, 40 (1953), 1—2.
[70] ————, Cardinal and Ordinal Numbers, 1958.
[71] Solovay, R. M., Independence results in the theory of cardinals I, II (2 preliminary reports), Notices A. M. S., 10(1963), 595.
[72] ————, The measure problem (abstract), J. S. L. 29(1964), 227—228; Notices A. M. S. 12(1965) 217. A model in set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable, Ann. of Math. (2) 92(1970), 1—56.
[73] ———— & Tennenbaum, S., Iterated Cohen extensions and Souslin's problem, ibid. 94 (1971), 201—245.
[74] Souslin (Suslin, Суслин), M., Problème 3), *Fund. Math.*, 1(1920), 223.
[75] Specker, E., Verallgemeinerte Kontinuumshypothese und Auswahlaxiom, Archiv der Math. 5 (1954), 332—337.
[76] Stone, M. H., Boole algebras and their applications to topology, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 20(1934), 197—202.
[77] ————, The theory of representations for Boolean algebra, Trans. A. M. S. 40(1936), 37—111.
[78] Szele, T., On Zorn's lemma, Publ. Math. Debrecen, 1(1950), 254—256.
[79] Tarski, A., Sur quelques théorèmes qui équivalent à l'axiome du choix, *Fund. Math.* 5(1924) 147—154.
[80] Tennebaum, S., Souslin's problem, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 59(1968), 60—63.
[81] Tukey, J. W., Convergence and uniformity in topology, Ann. of Math. Studies 2, 1940.
[82] Tychonoff, A. N., Über einen Funktionenraum, *Math. Annalen*, 111(1935), 762—766.
[83] Ward, Jr., L. E., The weak Tychonoff theorem and the axiom of choice, Proc. A. M. S., 13 (1962), 757—758.
[84] Whitehead, A. N. & Russell, B., Principia Mathematica, vol. II, 1912 (2nd ed. 1927).
[85] 谢邦杰,超穷数与超穷论法,吉林人民出版社, 1979.
[86] Zermelo, E., Beweise, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann, *Math. Annalen*, 59(1904), 514—516 (English translation in van Heijenoort 1967, [27], 139—141).
[87] ————, Neuer Beweis für die Wohlordnung, ibid. 65(1908), 107—128 ([27], 181—198).
[88] ————, Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I, ibid. 65(1908), 261—281 ([27] 199—215).
[89] Zorn, M., A remark on methods in transfinite algebra, Bull. A. M. S. 41(1935), 667—670.

© 1994-2011 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net